TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 3(74) 2021

LIÊN NGÀNH ĐIỆN - ĐIỆN TỬ - TỰ ĐỘNG HÓA

LIÊN NGÀNH CƠ KHÍ - ĐỘNG LỰC

NGÀNH TOÁN HỌC

NGÀNH KINH TẾ

TẠP CHÍ
NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SAO ĐỎ

TRONG SỐ NÀY

Số 3(74) 2021

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

CONTENTS

No 3(74) 2021

TITLE FOR ELECTRICITY - ELECTRONICS - AUTOMATION

TITLE FOR MECHANICAL AND DRIVING POWER ENGINEERING

TITLE FOR MATHEMATICS

TITLE FOR ECONOMICS

SCIENTIFIC JOURNAL
SAO DO UNIVERSITY

CONTENTS

No 3(74) 2021

Hiệu chỉnh nguyên lý cực đại Pontryagin trong bài toán điều khiển tối ưu

Correction of the maximum principle of Pontryagin in the optimal control problem

Nguyễn Thị Huệ[1*], Lưu Trọng Đại[2]
**Email: minhhuesaodo@gmail.com*
[1]Trường Đại học Sao Đỏ
[2]Học viện Tài chính

Ngày nhận bài: 15/8/2021
Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 28/9/2021
Ngày chấp nhận đăng: 30/9/2021

Tóm tắt

Bài báo nghiên cứu về tính tối ưu của hệ thống điều khiển bằng phương pháp sử dụng nguyên lý cực đại Pontryagin. Bài báo đưa ra một điều kiện của nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh để đảm bảo tính tối ưu cục bộ yếu của các quá trình điều khiển đối với hệ thống Affine và bộ điều khiển đa diện.

Từ khóa: *Hàm điều khiển; quỹ đạo chuyển động; nguyên lý cực đại; tối ưu cục bộ yếu.*

Abstract

The article studies the optimization of the control system by using the Pontryagin's maximum principle. Introduce a modified maximum rule condition to ensure weak local optimization of control processes for Affine systems and multifaceted controllers.

Keywords: *Control function; motion trajectory; maximum principle; weak local optimization.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Kiểm soát tối ưu là một trong những lĩnh vực quan trọng nhất của lý thuyết cực trị. Nó có những ứng dụng thực tế trong các lĩnh vực hoạt động khác nhau của con người. Các phương pháp nghiên cứu chính của các bài toán điều khiển tối ưu là phương pháp lập trình động Bellman và nguyên lý cực đại Pontryagin.

Nguyên lý cực đại Pontryagin được Viện sĩ người Nga Pontryagin nêu ra năm 1956 như một giả thiết và được các học trò của ông là Gamkrelidze (1957), Boltianski (1958) chứng minh chặt chẽ. Nhờ nguyên lý cực đại Pontryagin, người ta có thể quy các bài toán điều khiển tối ưu về việc giải các bài toán biên. Trong bài toán điều khiển tối ưu, theo lý thuyết thì một phương án thỏa mãn các điều kiện tồn tại có thể được đưa ra bằng cách xác định tất cả các quỹ đạo thỏa mãn nguyên lý cực đại Pontryagin và lựa chọn cái tối ưu nhất.

Tuy nhiên, trong thực tế, điều này có thể rất khó và điều quan trọng là phải hiểu liệu một quỹ đạo nhất định có phải là tối ưu hay không. Ở đây, chúng tôi giới thiệu một điều kiện nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh đối với hệ thống điều khiển Affine với bộ điều khiển đa diện để đảm bảo tính tối ưu cục bộ yếu của các quá trình điều khiển.

2. MỘT SỐ KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

Một số ký hiệu được sử dụng trong bài báo:

Chuẩn Euclide của một điểm x là $|x|$ và tích vô hướng giữa x,y là $< x, y >$. Chuẩn $|\cdot|p$ là chuẩn trong không gian L_p,với $1 \le p \le +\infty$.

Tập hợp $C\,([a;b];D)$ biểu thị tập các hàm liên tục $f:[a;b] \to D$.

Cho ma trận A, ma trận chuyển vị của A được biểu diễn A^*.

Ma trận đơn vị biểu diễn bởi I.

Độ đo Lebesgue của một tập C đã cho được biểu diễn bằng meas (C).

Tập hợp $C \subset \mathbb{R}^m$ là tập đa diện nếu nó được định nghĩa là tập nghiệm của một hệ bất phương trình tuyến tính, tức là:

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \langle x, c_i \rangle \le \alpha_i, i = \overline{1,k}\right\}$$

Trong đó:

c_i là một vectơ cố định trong $\mathbb{R}^m$;

α_i là một hằng số thực cố định, với mọi $i = \overline{1,k}$.

Người phản biện: 1. PGS. TS. Khuất Văn Ninh
2. TS. Nguyễn Viết Tuân

Tập hợp các đa diện bị chặn được gọi là các khối đa diện.

Chúng ta định nghĩa một số khái niệm cơ bản trong bài toán điều khiển tối ưu:

Xét bài toán điều khiển tối ưu sau đây:

$\phi(x(T)) \to inf$ (1)

$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)u, u \in U$ (2)

$x(0) = x_0$ (3)

Trong đó:

C cố định;

x_0 là một điểm cho trước trong $\mathbb{R}^n$.

Ở đây, và trong suốt bài báo, $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ là các hàm liên tục khả vi cấp hai;

$U \subset \mathbb{R}^m$ là một đa diện.

Định nghĩa 1 (*[1]*):

Điều khiển chấp nhận được là một hàm $u: [0,T] \to \mathbb{R}^m$ liên tục từng khúc, liên tục phải và thỏa mãn $u(t) \in U$, kí hiệu là $u(.)$.

Định nghĩa 2 (*[2]*):

Một cặp $(u(.), x(.))$ được gọi là một quá trình điều khiển $(u(.), x(.))$ bao gồm một hàm điều khiển $u(.)$ liên tục từng khúc và một quỹ đạo trạng thái $x(.)$ liên tục là nghiệm của phương trình vi phân $\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)u.$

Định nghĩa 3 (*[2]*):

Một quá trình điều khiển $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ được gọi là tối ưu cục bộ yếu nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho bất kỳ quá trình điều khiển có thể chấp nhận được $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ thỏa mãn $|u(\cdot) - \hat{u}(\cdot)|_\infty < \varepsilon$ thì bất đẳng thức $\phi(x(T)) \geq \phi(\hat{x}(T))$ được thỏa mãn.

Định nghĩa 4 (*[2]*): Hệ phương trình vi phân tuyến tính liên hợp với hệ thống (1) - (3) có dạng:

$$\psi^\Delta = -\left(\frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^* \psi^\sigma$$

Ở đây:

* biểu thị sự chuyển vị.

Định nghĩa 5 (*[2]*):

Hàm Pontryagin là hàm được xác định bởi.

$$H(t,\psi,x,v) = (\psi, f(t,x,v)) = \sum_{i=1}^{d} (\psi_i, f_i(t,x,v))$$

Hàm Lagrange tương ứng với bài toán (1) - (3) được xác định bởi.

$$L(\lambda, x(t_0), x(t_1)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \phi_i(x(t_0), x(t_1))$$

Với $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ là các nhân tử Lagange.

Định lý 1:

(*Nguyên lý cực đại Pontryagin's - Xem mục 2.2 - [2]*):

Giả sử rằng cho các hàm f và ϕ_i, $i \in \{0,1,\dots,n\}$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán (1) - (3). Nếu $(\hat{x}, \hat{u})$ là quá trình tối ưu của bài toán (1) - (3) thì tồn tại một vectơ khác 0 là $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gồm các nhân tử Lagange và $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_d(t))^*$ là nghiệm của hệ thống liên hợp và thỏa mãn các điều kiện dưới đây:

i. $\lambda_i \geq 0$, với $i = 0$ và $i \in \{k+1, \dots, n\}$;

ii. $\lambda_i \phi_i(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) = 0$ với mọi $i \in \{k+1, \dots, n\}$;

iii. Điều kiện chuyển đổi $\psi(t_0) = L_{x_0} := \dfrac{\partial}{\partial x(t_0)}$ và

$-\psi(t_1) = L_{x_1} := \dfrac{\partial}{\partial x(t_1)}$;

iv. Điều kiện cực đại.

- Điều kiện cực đại yếu:

Với mọi $r \in [t_0, t_1) \cap RS$,

$\left(\frac{\partial H}{\partial u}(r, \psi^\sigma(r), \hat{x}(r), \hat{u}(r)), v - \hat{u}(r)\right) \leq 0$ với mọi $v \in U$.

- Điều kiện cực đại mạnh: Nếu $s \in [t_0, t_1) \cap RD$,

$\max_{v\in U} H(s, \psi(s), \hat{x}(s), v) = H(s, \psi(s), \hat{x}(s), \hat{u}(s))$

Ở đây:

T là một tập con đóng, khác rỗng của $\mathbb{R}$.

RS là tập hợp các điểm phân tán bên phải của T.

RD là tập hợp các điểm trù mật bên phải của T trong $T\backslash\{\sup T\}$.

Chú ý rằng công thức của Định lý 1 không bị giới hạn bởi tính đóng của tập hợp các điều khiển có thể chấp nhận được U và tính lồi của tập hợp các điều kiện ràng buộc.

Bây giờ chúng ta tiến hành phân tích nguyên lý cực đại của Pontryagin là một điều kiện đủ và đảm bảo tính tối ưu của quá trình điều khiển. Ký hiệu bằng $x(., \bar{u}(\cdot))$ là lời giải cho bài toán Cauchy.

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)(\hat{u} + \bar{u}), x(0) = x_0.$$

Đặt $\hat{x}(\cdot) = x(\cdot, 0)$, ta có hàm sai phân:

$r: [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$x(t, \bar{u}(\cdot)) = \hat{x}(t) + \bar{x}(t) + r(t, \bar{u}(\cdot))$

Trong đó:

$\bar{u}(\cdot)$ là lời giải cho bài toán Cauchy

$\dot{\bar{x}} = \nabla_x f(t, \hat{x}) + \nabla_x (g(t,\hat{x})\hat{u})\bar{x} + g(t,\hat{x})\bar{u},$

$\bar{x}(0) = 0.$

Ta có:

$$|r(t, \bar{u}(\cdot))| \leq const \int_0^T \rho(t, \bar{u}(\cdot))dt$$

$$\rho\left(t,\bar{u}(\cdot)\right)=\left|\begin{array}{l}\dot{\hat{x}}(t)+\dot{\bar{x}}(t)-f\left(t,\hat{x}(t)+\bar{x}(t)\right)\\ \quad -g\left(t,\hat{x}(t)+\bar{x}(t)\right)\left(\hat{u}(t)+\bar{u}(t)\right)\end{array}\right|$$

$$\le \frac{1}{2}\max\left|\nabla^2 f(t,x)\right|\left|\bar{x}(t)\right|^2$$

$$+\frac{1}{2}\max\left|\nabla^2 g(t,x)\right|\left|\bar{x}(t)\right|^2\left(\left|\hat{u}(t)\right|+\left|\bar{u}(t)\right|\right)$$

$$+\max\left|\nabla g(t,x)\right|\left|\bar{x}(t)\right|\left|\bar{u}(t)\right|.$$

Trong đó:

$\rho\big(t,\bar{u}(\cdot)\big)$ hàm khoảng cách:

Từ $|\bar{x}(t)| \le (const)\int_0^T |\bar{u}(t)|dt$ (4)

Ta có:

$$\left|r\big(t,\bar{u}(\cdot)\big)\right| \le (const)\left(\int_0^T |\bar{u}(t)|dt\right)^2. \quad (5)$$

Đặt $\hat{u}(t) \in U$ và $\hat{u}(t)+\alpha\bar{u}(t) \in U$, với $t \in [0,T]$ và $\alpha \in [0,\alpha_0]$.

Khi đó, từ $\lim_{\alpha\to 0}\alpha^{-1} r\big(t,\alpha\bar{u}(\cdot)\big)=0$.

Ta có:

$$\phi\left(x\left(T,\alpha\bar{u}(\cdot)\right)\right)=\phi\left(\hat{x}(T)\right)+\langle\nabla\phi\left(\hat{x}(T)\right),\alpha\bar{x}(T)+r\left(T,\alpha\bar{u}(.)\right)\rangle$$
$$+\frac{1}{2}\langle\alpha\bar{x}(T)+r\left(T,\alpha\bar{u}(\cdot)\right),$$
$$\nabla^2\phi\left(x_\alpha\right)\left(\alpha\bar{x}(t)+r\left(T,\alpha\bar{u}(\cdot)\right)\right)\rangle,$$

Ở đây:

$x_\alpha=(1-\theta)\hat{x}(T)+\theta x\big(T,\alpha\bar{u}(\cdot)\big)$, $\theta \in [0,1]$.

Đặt $\Phi(t,s)$ là ma trận hệ số cơ bản của hệ thống.

$\dot{\bar{x}}=\big(\nabla_x f(t,\hat{x})+\nabla_x(g(t,\hat{x})\hat{u})\big)\bar{x}$.

Đặt $p(t)=-\Phi^*(T,t)\nabla\phi\big(\hat{x}(T)\big)$.

Ta có:

$$\langle\nabla\phi\big(\hat{x}(T)\big),\hat{x}(T)\rangle=-\int\langle p(t),g\big(t,\hat{x}(t)\big)\bar{u}(t)\rangle dt. \quad (6)$$

Giả sử rằng:

$$\int\langle p(t),g\big(t,\hat{x}(t)\big)\bar{u}(t)\rangle dt<0$$

Khi $\bar{u}(t)\in\big(U-\hat{u}(t)\big)$ và $\bar{u}(\cdot)\neq 0$.

Ta có:

$$\phi\left(x\big(T,\alpha\bar{u}(\cdot)\big)\right)>\phi\big(\hat{x}(T)\big)$$

Với mọi $\alpha>0$ đủ nhỏ.

Điều kiện:

$$\langle p(t),g\big(t,\hat{x}(t)\big)u\rangle<\langle p(t),g\big(t,\hat{x}(t)\big)\hat{u}(t)\rangle$$

Với:

$u\in U,\ u\neq\hat{u}(t)$ (7)

Có nghĩa là $\hat{u}(\cdot)$ là một điều khiển cực tiểu. Điều kiện (7) có thể được hiểu là nguyên lý cực đại xác định duy nhất một hàm điều khiển.

Để đảm bảo tính tối ưu cục bộ của $\hat{u}$ chúng ta chỉ xét lớp các điều khiển Affine và các bộ điều khiển đa diện.

Ngoài ra, đối với hệ thống afine với các bộ điều khiển đa diện, trong nhiều trường hợp, có thể xét một phiên bản của nguyên lý cực đại như một điều kiện đủ.

3. KẾT QUẢ CHÍNH

Trong phần này, chúng ta sẽ bổ sung các điều kiện của nguyên lý cực đại sao cho đảm bảo tính tối ưu cục bộ của điều khiển $\hat{u}$.

Định nghĩa 6 (*[3]*):

Điều khiển $\hat{u}(\cdot)$ được gọi là thỏa mãn một nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh, nếu tồn tại một hàm đo được, không âm $\sigma:[0,T]\to\mathbb{R}^+$, hằng số $\gamma>0$ và $a_0>0$ sao cho:

$\max_{u\in U}\big(\langle g\big(t,\hat{x}(t)\big)\big(u-\hat{u}(t)\big),p(t)\rangle+\sigma(t)|u-\hat{u}(t)|\big)\le 0;$

$meas\,\{t\in[0,T]|\sigma(t)<a\}\le\gamma a,\forall a\in[0,a_0];$

$meas\,\{t\in[0,T]|\sigma(t)=a\}=0,\forall a>0.$

Quan sát thấy, bất đẳng thức đầu tiên có nghĩa tương đương điều kiện nguyên lý cực đại:

$\max\langle g\big(t,\hat{x}(t)\big)\big(u-\hat{u}(t)\big),p(t)\rangle\le 0$

Với mọi $a\in[0,a_0]$.

Kết quả sau đây thiết lập các điều kiện hữu ích để chứng minh thuộc tính của nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh.

Đặt:

$U=co\{u_1,u_2,\dots,u_M\},\ 0=t_0<t_1<\ldots<t_L=T,$

$\hat{u}(t)=u_{m_l},t\in[t_l,t_{l+1}],l=\overline{0,L-1},\ q(t)=\big(g\big(t,\hat{x}(t)\big)\big)^*p(t),$

$M_l=\left\{m|\langle q(t_l\ ),u_m\rangle=\max_{u\in U}\langle q(t_l\ ),u\rangle\right\},l=\overline{0,L}.$

Bổ đề 1 (*[3]*):

Giả sử $q(.)$ là một hàm liên tục và khả vi liên tục từng phần, nguyên lý cực đại xác định duy nhất điều khiển $\hat{u}(\cdot)$ theo nghĩa là:

$\langle q(t),u-u_{m_l}\rangle<0,\forall t\in[t_l,t_{l+1}],\forall u\in U,u\neq u_{m_l}$

Và

$$\max_{\substack{m\in M_l\\ m\neq m_l}}\langle\dot{q}(t_l+0),u_m-u_{m_l}\rangle<-2\sigma_0,\ l=\overline{0,L-1} \quad (8)$$

$$\min_{\substack{m\in M_l\\ m\neq m_{l-1}}}\langle\dot{q}(t_l-0),u_m-u_{m_{l-1}}\rangle>2\sigma_0,\ l=\overline{1,L} \quad (9)$$

Khi đó, điều kiện nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh được thỏa mãn.

Chứng minh.

Đặt

$\Delta t>0,u=\sum_{m=1}^{M}\lambda_m u_m\,,\ u\neq u_{m_l},\lambda_m\ge 0,\sum_{m=1}^{M}\lambda_m=1.$

$$q(t_l+\Delta t), u-u_{m_l}\rangle = \langle q(t_l+\Delta t), \sum_{m\neq m_l} \lambda_m(u_m-u_{m_l})\rangle$$

Sử dụng (8) ta có:

$$= \sum_{\substack{m\in M_l\\ m\neq m_l}} \lambda_m \begin{pmatrix} \langle q(t_l+\Delta t), u_m-u_{m_l}\rangle \\ +\Delta t\langle \dot{q}(t_l+0), u_m-u_{m_l}\rangle + o(\Delta t) \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{m\notin M_l} \lambda_m \langle q(t_l+\Delta t), u_m-u_{m_l}\rangle$$

$$\le -\sum_{\substack{m\in M_l\\ m\neq m_l}} \lambda_m\sigma_0\Delta t \sum_{m\notin M_l} \lambda_m \langle q(t_l+\Delta t), u_m-u_{m_l}\rangle$$

Với mọi Δt đủ nhỏ.

Nếu $m\notin M_l$ thì ta có $\langle q(t_l), u_m-u_{m_l}\rangle < 0$. Từ $a(t)=\langle q(t), u_m-u_{m_l}\rangle$ liên tục và $a(t_l)<0$ dẫn đến $a(t_l+\Delta t)=\langle q(t_l+\Delta t), u_m-u_{m_l}\rangle<0$ với mọi Δt đủ nhỏ. Như vậy ta có: thể viết $a(t_l+\Delta t)=\langle q(t_l+\Delta t), u_m-u_{m_l}\rangle<-\sigma_2$ cho một số $\sigma_1>0$. Vì vậy, ta có:

$$\langle q(t_l+\Delta t), u_m-u_{m_l}\rangle \le -\sum_{\substack{m\in M_l\\ m\neq m_l}} \lambda_m\sigma_0\Delta t - \sum_{m\notin M_l}\lambda_m\sigma_1$$

$$\le -\sum_{\substack{m\in M_l\\ m\neq m_l}} \lambda_m\sigma_0\Delta t - \sum_{m\notin M_l}\lambda_m\sigma_1\Delta t$$

$$\le -\sum_{m\neq m_l}\lambda_m\sigma_2\Delta t$$

Với một số $\sigma_2>0$, ở đây Δt là đủ nhỏ.

Từ

$$|u_m-u_{m_l}| \le \left|\sum_{m\neq m_l}\lambda_m(u_m-u_{m_l})\right|$$

$$\le \sum_{m\neq m_l}\lambda_m \max|u_m-u_{m_l}|$$

Ta có:

$$\langle q(t_l+\Delta t), u-u_{m_l}\rangle \le -\sigma_2 \frac{\left|\sum_{m\neq m_l}\lambda_m(u_m-u_{m_l})\right|}{\max_{m\neq m_l}|u_m-u_{m_l}|}\Delta t$$

$$= -\sigma_2\frac{|u-u_{m_l}|}{\max_{m\neq m_l}|u_m-u_{m_l}|}\Delta t.$$

Tương tự, từ (9) ta có:

$$\langle q(t_l-\Delta t), u-u_{m_{l-1}}\rangle \le -\sigma_3\frac{|u_m-u_{m_l}|}{\max_{m\neq m_{l-1}}|u_m-u_{m_{l-1}}|}\Delta t.$$

Do đó, hàm $\sigma(t)$ trong nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh có thể được xác định như sau:

$$\sigma(t)=\bar{\sigma}\left(\frac{t_{l+1}-t_l}{2}-\left|t-\frac{t_{l+1}+t_l}{2}\right|\right), t\in[t_l,t_{l+1}], l\in\overline{0,L-1},$$

Ở đây:

$\bar{\sigma}$ đủ nhỏ.

Bổ đề sau cung cấp một bất đẳng thức sẽ có liên quan trực tiếp để chứng minh điều kiện đủ cho tính tối ưu.

Bổ đề 2 ([3]):

Với σ trong điều kiện nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh. Thì

$$\int_0^T \sigma(t)w(t)dt - c\left(\int_0^T w(t)dt\right)^2 \ge 0 \qquad (10)$$

Ở đây:

$|w(\cdot)|_\infty < \frac{1}{2\gamma c}$.

Chứng minh.

Xét bài toán điều khiển tối ưu sau:

$$\int_0^T \sigma(t)w(t)dt - cy^2(T) \to \inf$$

$\dot{y}=w,\ w\in[0,\varepsilon],\ y(0)=0.$

Giả sử rằng điều khiển tối ưu $\widehat{w}(\cdot)$ khác 0. Khi đó, tồn tại $\lambda\ \ge\ 0$ và một hàm $\psi(\cdot)$ tuyệt đối liên tục sao cho:

$\dot{\psi}=0,\ \psi(T)=2\lambda c\hat{y}(T);$

$\max_{w\in[0,\varepsilon]}(\psi(t)-\lambda\sigma(t))w=(\psi(t)-\lambda\sigma(t))\widehat{w}(t);$

$\lambda+|\psi(\cdot)|>0.$

Chắc chắn $\lambda\ \neq\ 0$. Đặt $\lambda\ =\ 1$. Kể từ đó.

$$\hat{\psi}(t)=\begin{cases}\varepsilon & \psi(t)>\sigma(t)\\ 0 & \psi(t)<\sigma(t)\end{cases}$$

Và $\psi(t)\equiv 2c\hat{y}(T)=2c\varepsilon\mu$

Ở đây:

$M=meas\{t\mid\sigma(t)<\psi(t)\}$.

Vậy $M=meas\{t\mid\sigma(t)<2c\varepsilon M\}\le 2\gamma c\varepsilon M$.

Lấy $\varepsilon<\frac{1}{2\gamma c}$ dẫn đến mâu thuẫn. Vậy điều khiển tối ưu bằng không. Nó có nghĩa (10) được chứng minh.

Định lý dưới đây xác định điều kiện đủ của nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh.

Xét bài toán điều khiển tối ưu (1) - (3).

Định lý 2.

Đặt $(\hat{u}(\cdot),\hat{x}(\cdot))$ là quá trình điều khiển chấp nhận được thỏa mãn điều kiện của nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh, gọi p (.) là nghiệm của quá trình Cauchy.

$\dot{p}(t)=-\left(\nabla\left(f(t,\hat{x}(t))\right)+g(t,\hat{x}(t))\hat{u}(t)\right)\ p(t),$

$p(T)=-\nabla\phi(\hat{x}(T)).$

Thì $(\hat{u}(\cdot),\hat{x}(\cdot))$ là một tối ưu cục bộ yếu theo nghĩa: Tồn tại $\varepsilon\ >\ 0$ sao cho mọi quá trình điều khiển chấp nhận được $(u(\cdot),x(\cdot))$ thỏa mãn $|u(\cdot)-\hat{u}(\cdot)|_\infty<\infty$

thì bất đẳng thức $\phi\big(x(T)\big) \geq \phi\big(\hat{x}(T)\big)$ được thỏa mãn.

Chứng minh.

Thật vậy, từ (4), (5), (6) và nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh ta có:

$$\phi\left(x(T),\bar{u}\right) \geq \phi\left(\hat{x}(T)\right) + \langle\nabla\phi\left(\hat{x}(T),\bar{x}(T)\right)$$

$$-(const)\left(\int_0^T\left|\bar{u}(t)\right|dt\right)^2$$

$$= \phi\left(\hat{x}(T)\right) - \int_0^T\langle p(t), g\left(t,\hat{x}(t)\right)\bar{u}(t)dt$$

$$-(const)\left(\int_0^T\left|\bar{u}(t)\right|dt\right)^2$$

$$\geq \phi\left(\hat{x}(T)\right) + \int_0^T\sigma(t)\bar{u}(t)dt - (const)\left(\int_0^T\left|\bar{u}(t)\right|dt\right)^2$$

Áp dụng Bổ đề 2 ta có kết quả cần chứng minh.

Sự tổng quát của nguyên tắc cực đại đã hiệu chỉnh cho các bài toán điều khiển tối ưu nhằm thiết lập tập hợp các điều kiện ràng buộc đảm bảo cho tính tối ưu của quá trình điều khiển.

Xét bài toán điều khiển:

$$\phi\big(x(T)\big) \to \inf \tag{11}$$

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)u,\ u \in U \tag{12}$$

$$x(t) \in C \tag{13}$$

$$x(0) \in C_0,\ x(T) \in C_1 \tag{14}$$

Định lý 3.

Đặt $\big(\hat{u}(\cdot),\hat{x}(\cdot)\big)$ là quá trình điều khiển chấp nhận được. Giả sử rằng tồn tại một hàm biến thiên, bị chặn p (.) và một vectơ có giá trị độ đo Borel là μ được xác định trong $[0,T]$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$dp(t) = -\nabla_x\left(f\big(t,\hat{x}(t)\big)\right) + g\big(t,\hat{x}(t)\big)\hat{u}(t)^{*}p(t)dt + d\mu(t), \tag{15}$$

$\int_0^T \langle x(t)-\hat{x}(t)\,, d\mu(t)\rangle \leq 0$ với mọi quỹ đạo chấp nhận được $x\ (t)$.

$$\langle p(0), c_0-\hat{x}(0)\rangle \leq -(const)|c_0-\hat{x}(0)|^{2-\varepsilon} const \tag{16}$$

$$\forall c_0 \in C_0,\ \varepsilon \in [0,1] \tag{17}$$

$$\langle -p(T) - \nabla\phi\big(\hat{x}(T)\big), c_1-\hat{x}(T)\rangle \leq 0,\ c_1 \in C_1 \tag{18}$$

Hơn nữa, nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh được thỏa mãn.

Khi đó $\big(\hat{u}(\cdot),\hat{x}(\cdot)\big)$ là tối ưu cục bộ yếu.

Chứng minh:

Đặt $\big(\hat{u}(\cdot)+\bar{u}(\cdot),x(\cdot)\big)$ là quá trình điều khiển chấp nhận được.

Ta có:

$$\phi\left(x(T)\right) \geq \phi\left(\hat{x}(T)\right) + \langle\nabla\phi\left(\hat{x}(T)\right), x(T)-\hat{x}(T)\rangle$$

$$-(const)\left|x(T)-\hat{x}(T)\right|^2.$$

Sử dụng (18) ta có:

$$\phi\left(x(T)\right) \geq \phi\left(\hat{x}(T)\right) - \langle p(T), x(T)-\hat{x}(T)\rangle$$

$$-(const)\left|x(T)-\hat{x}(T)\right|^2.$$

Đặt $\bar{x}(\cdot)$ là nghiệm của quá trình Cauchy.

$$\dot{\bar{x}} = \nabla_x\left(f\left(t,\hat{x}(t)\right) + g\left(t,\hat{x}(t)\right)\hat{u}(t)\right)\bar{x} + g\left(t,\hat{x}(t)\right)\bar{u}$$

$$\bar{x}(0) = x(0)-\hat{x}(0).$$

Chú ý rằng:

$$\rho(t) = \left|\dot{\hat{x}}(t) + \dot{\bar{x}}(t) - \left(f\left(t,\hat{x}+\bar{x}\right) + g\left(t,\hat{x}+\bar{x}\right)\left(\hat{u}+\bar{u}\right)\right)\right|$$

$$\leq (const)\left(\left|\bar{x}\right|^2 + \left|\bar{x}\right|\left|\bar{u}\right|\right).$$

Từ $\left|\bar{x}\right| \leq (const)\left(\left|x(0)-\hat{x}(0)\right| + \int_0^T\left|\bar{u}(t)\right|dt\right)$,

Ta có:

$$\left|x(T) - \left(\hat{x}(T)+\bar{x}(T)\right)\right| \leq (const)\int_0^T\rho(t)dt$$

$$\leq (const)\left(\left|x(0)-\hat{x}(0)\right|^2 + \left(\int_0^T\left|\bar{u}(t)\right|dt\right)^2\right)$$

Từ điều này và bất đẳng thức:

$$\left|x(t)-\hat{x}(t)\right| \leq (const)\left(\left|x(0)-\hat{x}(0)\right| + \int_0^T\left|\bar{u}(t)\right|dt\right)$$

Ta có:

$$\phi\left(x(T)\right) \geq \phi\left(\hat{x}(T)\right) - \langle p(T),\bar{x}(T)\rangle$$

$$-(const)\left(\left|x(0)-\hat{x}(0)\right|^2 + \left(\int_0^T\left|\bar{u}(t)\right|dt\right)^2\right)$$

Đặt Φ là ma trận hệ số cơ bản của hệ thống.

$$\dot{\bar{x}} = \nabla_x\left(f\left(t,\hat{x}(t)\right) + g\left(t,\hat{x}(t)\right)\hat{u}(t)\right)\bar{x}.$$

Từ $p(t) = \Phi^{*}(T,t)p(T) - \int_t^T\Phi^{*}(s,t)d\mu(s)$,

Ta có:

$$-\langle p(t),\bar{x}(T)\rangle = -\langle p(t), \Phi(T,0)\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)$$

$$+\int_0^T\Phi(T,t)g\left(t,\hat{x}(t)\right)\bar{u}(t)dt\rangle$$

$$= -\langle p(0) + \int_0^T\Phi^{*}(s,0)d\mu(s), x(0)-\hat{x}(0)\rangle$$

$$-\int_0^T\langle p(t), g\left(t,\hat{x}(t)\right)\bar{u}(t)\rangle dt$$

$$-\int_0^T \left\langle \int_0^T \Phi^*(s,t)\, g\left(t,\hat{x}(t)\right)\bar{u}(t)dt, d\mu(s)\right\rangle$$

$$= -\langle p(0), x(0)-\hat{x}(0)\rangle$$
$$-\int_0^T \langle p(t), g\left(t,\hat{x}(t)\right)\bar{u}(t)\rangle dt$$
$$-\int_0^T \langle \bar{x}(s), d\mu(s)\rangle$$

$$= -\langle p(0), x(0)-\hat{x}(0)\rangle$$
$$-\int_0^T \langle p(t), g\left(t,\hat{x}(t)\right)\bar{u}(t)\rangle dt$$
$$-\int_0^T \langle x(s)-\hat{x}(s), d\mu(s)\rangle$$
$$+\int_0^T \langle x(s)-\left(\hat{x}(s)+\bar{x}(s)\right), d\mu(s)\rangle$$

Sử dụng (17), (16) và nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh ta có:

$$\phi\left(x(T)\right) \geq \phi\left(\hat{x}(T)\right) + (const)\left|x(0)-\hat{x}(0)\right|^{2-\varepsilon}$$
$$+\int_0^T \sigma(t)\left|\bar{u}(t)\right|dt$$
$$-(const)\left(\left|x(0)-\hat{x}(0)\right|^2 + \left(\int_0^T \left|\bar{u}(t)\right|dt\right)^2\right).$$

Áp dụng Bổ đề 2 ta có kết quả.

***Chú ý*:**

Điều kiện (17) được thỏa mãn nếu C_0 là một điểm hoặc một hình đa diện và $\hat{x}(0)$ là một vectơ.

4. KẾT LUẬN

Bài báo khái quát về tính tối ưu của hệ thống điều khiển bằng phương pháp sử dụng nguyên lý cực đại Pontryagin.

Trong bài này chúng tôi nghiên cứu đã hiệu chỉnh, bổ sung điều kiện cho nguyên lý cực đại Pontryagin để đảm bảo tính tối ưu cục bộ yếu của các quá trình điều khiển đối với hệ thống Affine và bộ điều khiển đa diện. Nguyên lý cực đại đã hiệu chỉnh chứng tỏ rằng điều khiển được xác định duy nhất cho hầu hết các khoảng thời gian và trạng thái của hệ thống là ổn định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Phạm Kì Anh (2001), *Phương pháp số trong lý thuyết điều khiển tối ưu*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội.

[2]. Martin Bohnera, Kenzhegaly Kenzhebaevb, Olga Lavrovac and Oleksandr Stanzhytskyic (2017), *Pontryagin's maximum principle for dynamic systems on time scales*, Journal of difference equations and applications, 1161 -1189.

[3]. M. Margarida A. Ferreira; Georgi V. Smirnov (2016), *On the sufficiency of Pontryagin's maximum principle*, PAFA - online Journal on Pure and Applied Functional Analysis, 217 - 230.

[4]. M.M.A. Ferreira, A.F. Ribeiro and G.V. Smirnov (2015), *Local Minima of Quadratic Functionals and Control of Hydro-Electric Power Stations*, JOTA-Journal of Optimization Theory and Applications, 165, 985-1005.

[5]. A. F. Filippov (1967), *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, SIAM J. Control, 5, 609-621.

[6]. N. P. Osmolovskii and H. Maurer (2012), *Applications to Regular and Bang-Bang control: second-order necessary and suffcient conditions optimality conditions in the calculus of variations and optimal control*. SIAM, Advances in Design and Control, 24.

THÔNG TIN TÁC GIẢ

Nguyễn Thị Huệ

- Tóm tắt quá trình đào tạo, nghiên cứu (thời điểm tốt nghiệp và chương trình đào tạo, nghiên cứu):

+ Năm 2008: Tốt nghiệp Đại học ngành Sư phạm Toán học, Đại học Vinh.

+ Năm 2014: Tốt nghiệp Thạc sĩ ngành Lý thuyết xác suất thống kê, Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQGHN.

- Tóm tắt công việc hiện tại: Giảng viên khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Sao Đỏ.

- Lĩnh vực quan tâm: Nghiên cứu toán lý thuyết và các ứng dụng của toán trong các ngành kỹ thuật.

- Email: minhhuesaodo@gmail.com.

- Điện thoại: 0977944536.

Lưu Trọng Đại

- Tóm tắt quá trình đào tạo, nghiên cứu (thời điểm tốt nghiệp và chương trình đào tạo, nghiên cứu):

+ Năm 2005: Tốt nghiệp Đại học ngành Toán - Tin, Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

+ Năm 2017: Tốt nghiệp Thạc sĩ ngành Kỹ thuật máy tính, Đại học Bách khoa Hà Nội.

- Tóm tắt công việc hiện tại: Giảng viên khoa Cơ bản, Học viện Tài chính.

- Lĩnh vực quan tâm: Giải tích và Đại số.

- Email: luutrongdai@hvtc.edu.vn.

- Điện thoại: 0922551772.